Δευτέρα 8 Μαΐου 2017

Λογισμός Μεταβολών (Calculus of variations)

Το βασικό πρόβλημα που θέλουμε να μελετήσουμε είναι η εύρεση της συνάρτησης $\psi=\psi(x)$ τέτοια ώστε το ολοκλήρωμα $J=\int_{x_1}^{x_2} f(x,\psi,\psi')\,dx$

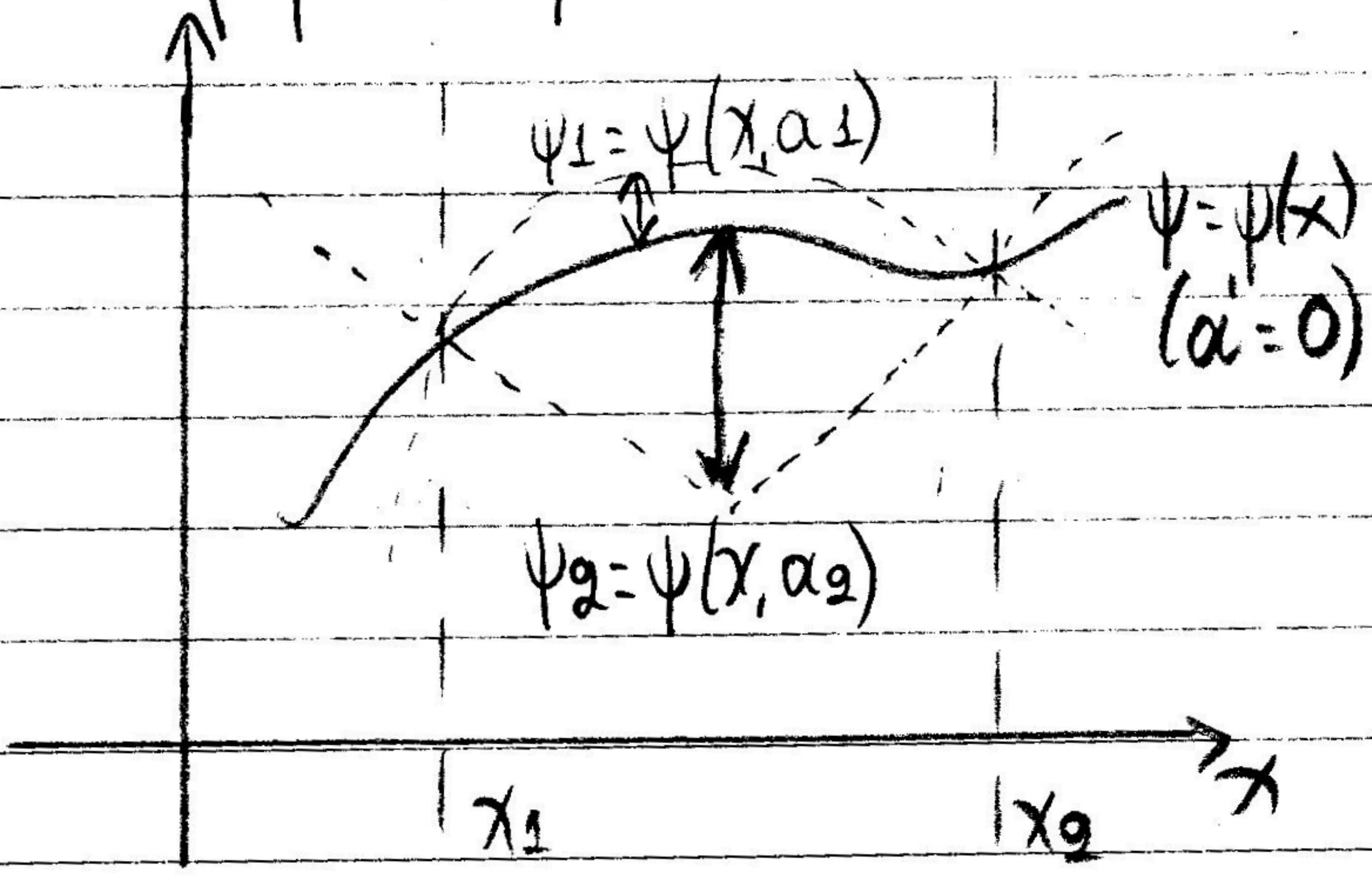
να μεγιστοποιείται ή να ελαχιστοποιείται. (ακρότατα)
(Πρόβλημα βελτιστοποίησης)

Το ολοκλήρωμα J είναι ένα συναρτησιοειδές (functional) και εξαρτάται από τις συναρτήσεις $\psi(x)$, $\psi'(x)$ για δεδομένα άκρα x_1, x_2.
Στη γενικότερη περίπτωση το πρόβλημα μπορεί να ζητά και τις τιμές των άκρων x_1, x_2 ώστε το ολοκλήρωμα να είναι ακρότατο.

Ας υποθέσουμε ότι η $\psi=\psi(x)$ μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί το ολοκλήρωμα. Εδώ ας πούμε ότι το ελαχιστοποιεί. Δηλαδή για οποιαδήποτε άλλη συνάρτηση η τιμή του ολοκληρώματος θα είναι μεγαλύτερη.

—▷

Θεωρούμε $\psi = \psi(x, \alpha)$
τότε προφανώς $\psi(x) = \psi(x, 0)$ είναι η ζητούμενη συνάρτηση
Δηλαδή, για τις διάφορες τιμές της ποσότητας α
υπάρχει η συνάρτηση που αντιστοιχεί σε μια τιμή του
ολοκληρώματος.
Για $\alpha = 0$ το J ελαχιστοποιείται και ζητάμε την τιμή του
ολοκληρώματος μεταβάλλοντας αυτή τη σταθερά α



Ορίζουμε μια νέα συνάρτηση $\psi = \psi(x)$ παραγωγίσιμη με συνεχή πρώτη παράγωγο.
ώστε $\psi(x, a) = \psi(x, 0) + a \cdot \eta(x)$

Θεώρημα Taylor : $\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n$

$$\begin{cases} \psi(x_1, a) = \psi(x_1, 0) \\ \psi(x_2, a) = \psi(x_2, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \eta(x_1) = 0 \\ \eta(x_2) = 0 \end{cases}$$

$$J = J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \psi(a, x), \psi'(a, x))\, dx$$

Ζητάμε $\frac{dJ}{d\alpha} = 0$, για $\alpha = 0$

$\longrightarrow$

Παράδειγμα:

$$J = \int_0^{2\pi} f\,dx, \quad f = \left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2, \quad \psi = x.$$

Διαλέγουμε $\eta(x) = \sin x$.

Απάντηση: $\psi(x,a) = \psi(x,0) + a\eta(x)$
$= x + a\cdot\sin x$

$f = \left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 = (1 + a\sin x)^2$ άρα

$$J(a) = \int_0^{2\pi} (1 + a\cos x)^2 dx = 2\pi + a^2\pi$$

Άρα πράγματι J ελάχιστο για $a=0$.

Οι εξισώσεις Euler.

Το συναρτησιοειδές μας πλέον είναι $J = J(a)$ και ζητάμε $\frac{dJ}{da} = 0$ για $a = 0$

Δηλαδή $\frac{dJ}{da} = \frac{d}{da}\int_{x_1}^{x_2} f\,dx = \int_{x_1}^{x} \frac{\partial f}{\partial a}\,dx$

Γνωρίζουμε ότι $f = f(x, \psi, \psi')$

Θεωρούμε και τις ψ, ψ' μεταβλητές του συστήματος τότε:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \cancel{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial a}} + \frac{\partial f}{\partial \psi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial \psi'}\cdot\frac{\partial \psi'}{\partial a}$$

$\psi = \psi(x,0) + a\cdot\eta(x)$

$$= \eta(x)\frac{\partial f}{\partial \psi} + \eta'(x)\frac{\partial f}{\partial \psi'}$$

$\frac{d\psi}{dx} = \psi'(x,0) + a\cdot\eta'(x)$

$$\frac{dJ}{da} = \int_{x_1}^{x_2}\left[\eta\frac{\partial f}{\partial \psi} + \eta'\frac{\partial f}{\partial \psi'}\right]dx$$

Εστιάζουμε στον όρο $\int_{x_1}^{x_2} \eta'\frac{\partial f}{\partial \psi'}\,dx$ = παραγοντική ολοκλήρωση →

$$= \cancelto{0}{\eta \frac{\partial f}{\partial \psi'}\Big|_{x_1}^{x_2}} - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \psi'}\right) dx$$

Γνωρίζαμε ότι
$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$

Τελικά: $$\frac{dJ}{da} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\eta \cdot \frac{\partial f}{\partial \psi} - \eta \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \psi'}\right)\right] dx =$$

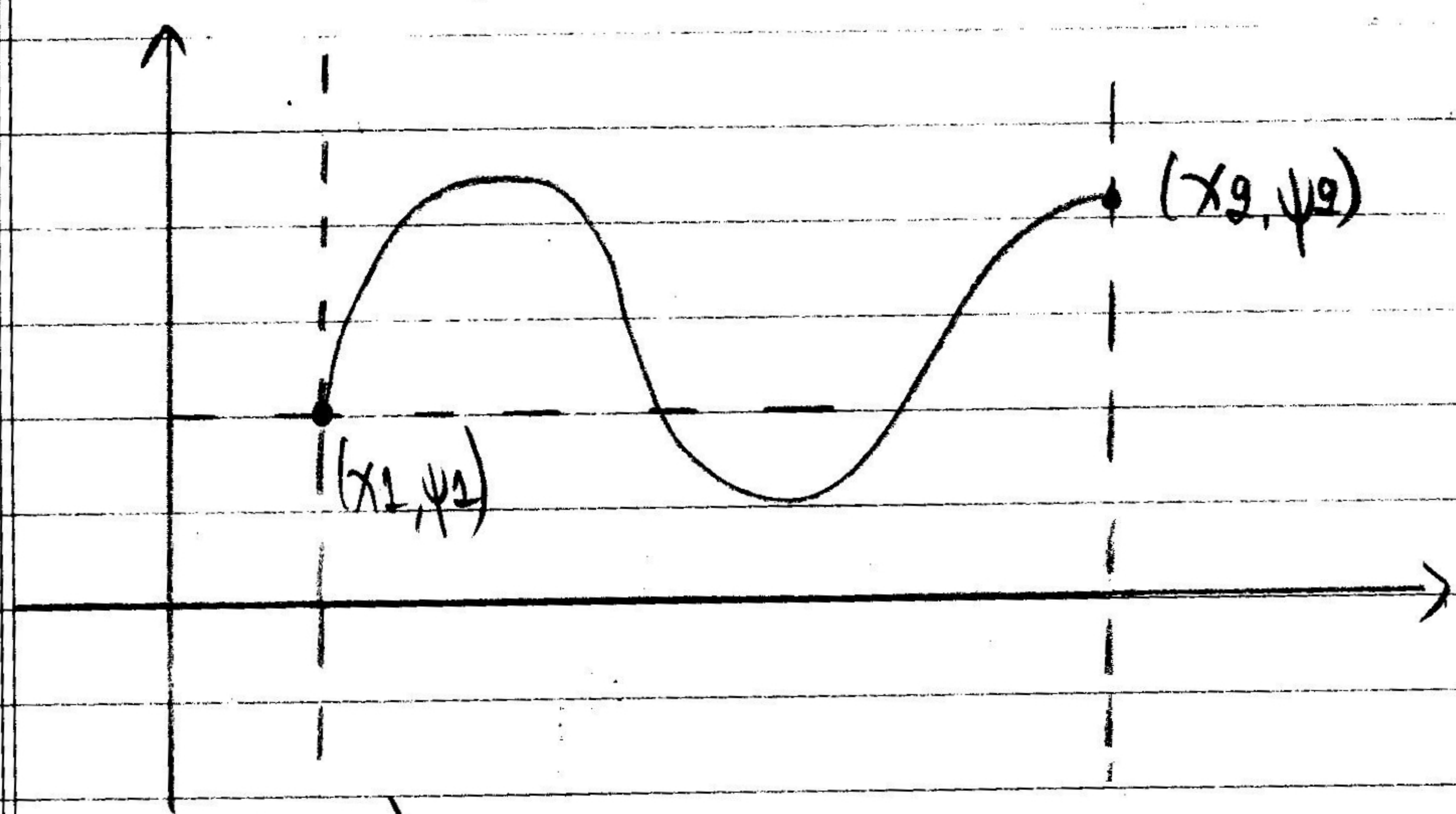
$$= \int_{x_1}^{x_2} \eta \left[\frac{df}{d\psi} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \psi'}\right] dx = 0 \,, \quad a = 0 \quad \forall \eta$$

Μια αναγκαία συνθήκη είναι: $\boxed{\frac{\partial f}{\partial \psi} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \psi'}\right) = 0}$

Αυτή είναι η εξίσωση Euler.

<u>Παράδειγμα</u>

Η συντομότερη απόσταση μεταξύ δυο σημείων είναι η ευθεία



$$S = \int_{(x_1,\psi_1)}^{(x_2,\psi_2)} \sqrt{dx^2 + d^2\psi} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (\psi')^2}\, dx$$

$$f=\sqrt{1+(\psi')^2}$$

και $$\frac{\partial f}{\partial \psi}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \psi'}\right)=0$$

$$\left(\sqrt{1+x^2}\right)'=?$$

$$\frac{\partial f}{\partial \psi'}=\frac{2\psi'}{2\sqrt{1+(\psi')^2}}$$

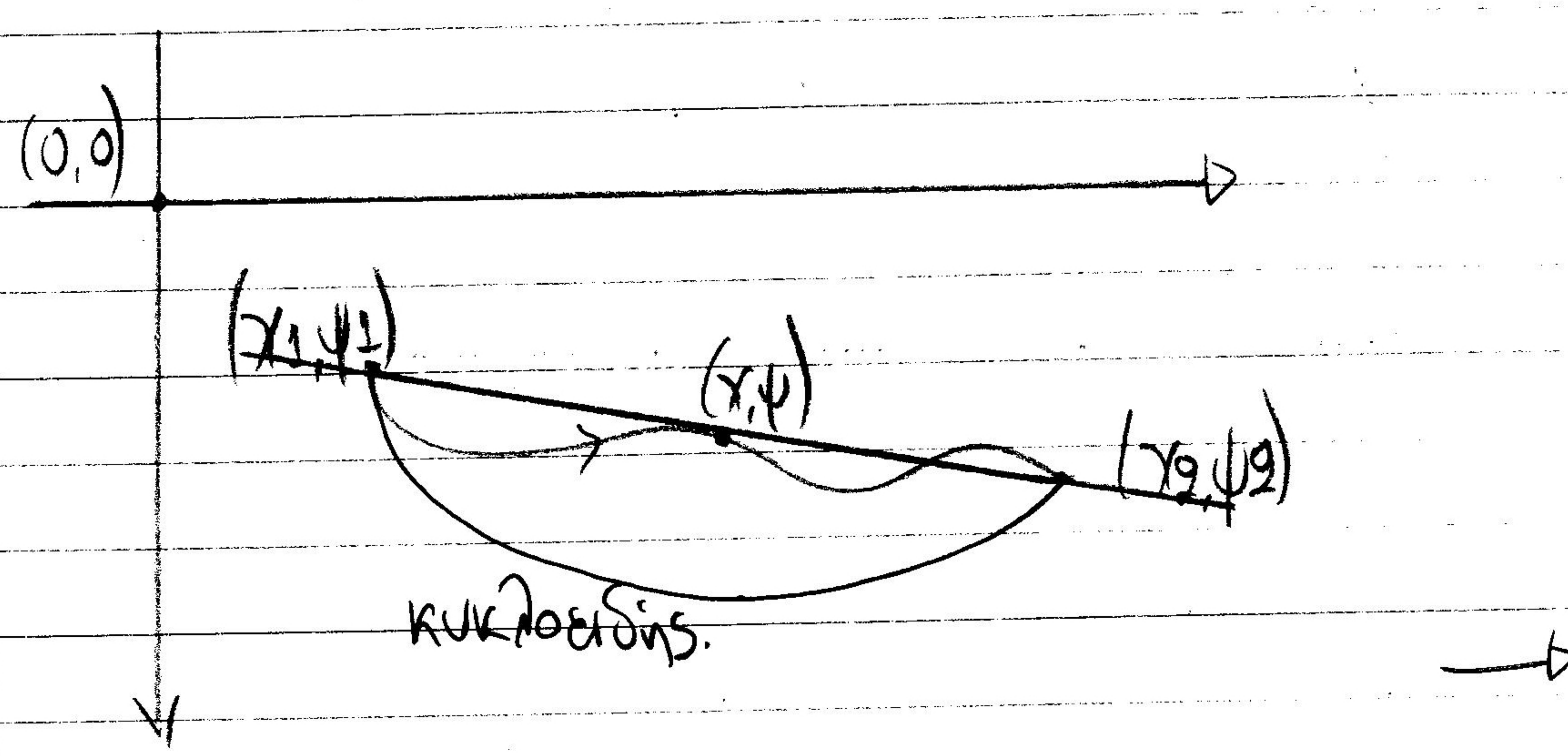
$$\frac{d}{dx}\cdot\frac{\partial f}{\partial \psi'}=0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \psi'}=c$$

$$\frac{\psi'}{\sqrt{1+(\psi')^2}}=c \Rightarrow (\psi')^2=c^2\left(1+(\psi')^2\right)$$

$$(\psi')^2=\frac{c^2}{1-c^2} \Rightarrow \psi'=\text{σταθερό.}$$

Παράδειγμα: Το πρόβλημα του βραχυστόχρονου

Ένα υλικό σημείο κινείται υπό την επίδραση σταθερού πεδίου ξεκινώντας από ηρεμία στο σημείο (x_1,ψ_1) και μεταβαίνει σε χαμηλότερο σημείο (x_2,ψ_2).
Να βρεθεί η διαδρομή που πρέπει να ακολουθήσει για να ολοκληρώσει την μετάβαση στον ελάχιστο δυνατό χρόνο.



$$t = \int_{(x_1,\psi_1)}^{(x_2,\psi_2)} \frac{ds}{v}$$

Από τη διατήρηση της ενέργειας : $\frac{1}{2} m V^2 - m g \psi = 0$

$$V = \sqrt{2g\psi}$$

$$t = \int \frac{\sqrt{dx^2 + d\psi^2}}{\sqrt{2g\psi}} = \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{\sqrt{(dx/d\psi)^2 + 1}}{\sqrt{2g\psi}}\, d\psi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{\sqrt{(x')^2 + 1}}{\sqrt{\psi}}\, d\psi$$

Άρα $f = f(\psi, x, x') = \sqrt{\frac{(x')^2 + 1}{\psi}}$

$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{d\psi}\frac{\partial f}{\partial x'} = 0$ <u>Προσοχή</u> : Αλλαγή στις ανεξάρτητες και εξαρτημένες μεταβλητές $x = x(\psi)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ και άρα $\frac{d}{d\psi}\frac{\partial f}{\partial x'} = 0 \Rightarrow \frac{(x')^2}{\psi(1+x'^2)} = \frac{1}{2a} = c$ σταθερή

$$(x')^2 = \frac{\psi}{2a} + \frac{\psi}{2a}(x')^2 \Rightarrow (x')^2 = \frac{\frac{\psi}{2a}}{1 - \frac{\psi}{2a}}$$

$$(x') = \sqrt{\frac{\psi}{2a-\psi}} \Rightarrow x = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{\psi}{2a-\psi}}\, d\psi$$

Λύση είναι $\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ \psi = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$ Κυκλοειδής καμπύλη.